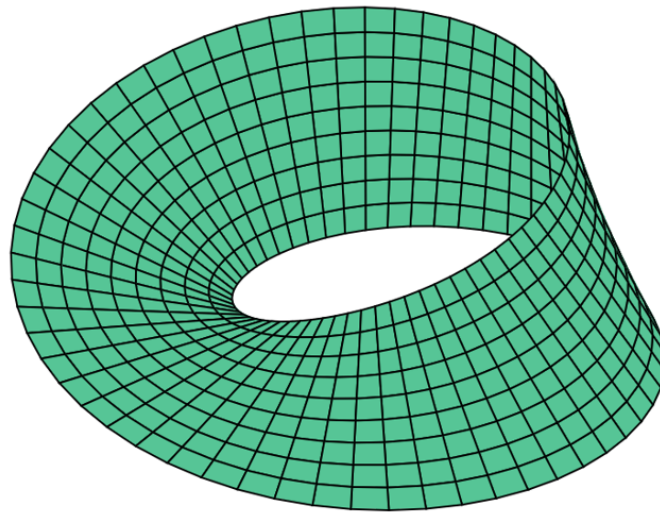


Cálculo. Tema 1

ETSII- GITI

EJERCICIO PROPUESTO N^o 4



Academia M²¹



Puedes ver el ejercicio resuelto en nuestro canal de YouTube
o entrando en nuestra página web: Academia-M21

Ejercicio 4

Las medias aritmética A_n y geométrica G_n de los números positivos $a_1, a_2, \dots, a_n$ se definen como

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Probar por inducción que la media geométrica es menor o igual que la media aritmética.

Solución 1. :

Demostramos la fórmula por inducción;

- Para $n = 1$ es evidente que se cumple

$$A_1 = a_1 \geq a_1 = G_1$$

Comprobamos que también se cumple para $n = 2$, porque la vamos a necesitar luego

$$\begin{aligned} (a_1 - a_2)^2 &\geq 0 \Rightarrow \\ a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 &\geq 0 \Rightarrow \\ a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2 &\geq 4a_1a_2 \Rightarrow \\ (a_1 + a_2)^2 &\geq 4a_1a_2 \Rightarrow \\ a_1 + a_2 &\geq \sqrt{4a_1a_2} = 2\sqrt{a_1a_2} \Rightarrow \\ \frac{a_1 + a_2}{2} &\geq \sqrt{a_1a_2} \end{aligned}$$

- Comenzamos escribiendo la media geométrica de $n + 1$ elementos, y la media aritmética de $n + 1$ elementos

$$G_{n+1} = \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \dots a_{n+1}}$$

$$A_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1}}{n + 1}$$

si escribimos

$$\begin{aligned}
G_{n+1}^{n+1} A_{n+1}^{n-1} &= a_1 a_2 \cdots a_{n+1} A_{n+1}^{n-1} = (a_1 a_2 \cdots a_n) a_{n+1} A_{n+1}^{n-1} = G_n^a a_{n+1} A_{n+1}^{n-1} \leq \\
&\leq A_n^n a_{n+1} A_{n+1}^{n-1} = A_n^n (a_{n+1} \underbrace{A_{n+1} \cdot A_{n+1} \cdots A_{n+1}}_{n-1 \text{ factores}}) = A_n^n (\sqrt[n]{a_{n+1} A_{n+1} \cdots A_{n+1}})^n \leq \\
&\leq A_n^n \left(\frac{a_{n+1} + (n-1)A_{n+1}}{n} \right)^n = \left(A_n \frac{a_{n+1} + (n-1)A_{n+1}}{n} \right)^n \leq \\
&\leq \left[\left(\frac{A_n + \frac{a_{n+1} + (n-1)A_{n+1}}{n}}{2} \right)^2 \right]^n = \left(\frac{A_n}{2} + \frac{a_{n+1} + (n-1)A_{n+1}}{2n} \right)^{2n} = \\
&= \left(\frac{\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}}{2} + \frac{a_{n+1} + (n-1) \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1}}{n+1}}{2n} \right)^{2n} = \\
&= \left(\frac{(n+1) \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right)}{2(n+1)} + \frac{\frac{(n+1)a_{n+1}}{n} + (n-1) \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1}}{n}}{2(n+1)} \right)^{2n} = \\
&= \left(\frac{[(n+1) + (n-1)] \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right)}{2(n+1)} + \frac{[(n+1) + (n-1)] \left(\frac{a_{n+1}}{n} \right)}{2(n+1)} \right)^{2n} = \\
&= \left(\frac{(2n) \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right)}{2(n+1)} + \frac{(2n) \left(\frac{a_{n+1}}{n} \right)}{2(n+1)} \right)^{2n} = \\
&= \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n+1} + \frac{a_{n+1}}{n+1} \right)^{2n} = \\
&= \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n+1} \right)^{2n} = A_{n+1}^{2n}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos deducido que

$$G_{n+1}^{n+1} A_{n+1}^{n-1} \leq A_{n+1}^{2n} \iff G_{n+1}^{n+1} \leq A_{n+1}^{n+1} \iff G_{n+1} \leq A_{n+1}$$